Winfrid Krone

Strukturen in einigen künstlichen Zahlenfolgen

Korrigierte und erweiterte Fassung (März 2011)

Inhalt

1 Einleitung und Definition einiger Termini

Hauptgegenstand dieser Studie sind Zahlenfolgen, die sich aus Potenzierung und Quersummation der Potenzen der natürlichen Zahlen (n) ergeben.

Ausgangspunkt und Anlaß der hier beschriebenen Analyse dieser Zahlenfolgen war deren Periodizität, die der Zahl "9" eine gewisse Bedeutung zuweist, in sofern, als jede dritte Position in diesen Folgen mit einer durch 9 teilbaren Zahl besetzt ist. Letztere werden in dieser Studie als Nonare bezeichnet; Nonare (NR) nehmen also in diesen Folgen ein Drittel aller Positionen ein, und zwar in der Weise, daß ihnen jeweils zwei Internonare (INR) vorausgehen. Der Einfachheit halber, werden auch die beiden initialen Werte (Positionen 1 und 2 von n) jeder Folge als Internonare bezeichnet, obwohl diese eigentlich als "Pränonare" zu bezeichnen wären. Abgesehen von diesen ersten, besetzt jedes Paar von INR bezüglich der es flankierenden Nonare eine postnonare und eine pränonare Position. Die Folge aus zwei INR und einem NR heißt "Triplett". Die Zahlen dieser Folgen gehen durch Potenzierung und einfache Quersummation der Potenzen aus den natürlichen Zahlen (n) hervor, deren Folge – wie eine Art eindimensionalen Koordinatensystems – die Positionen der so abgeleiteten Zahlenwerte in der Folge festlegt. Der variable Exponent trägt die Bezeichnung x; die Quersummen heißen q im Falle von x = 1, also bei den natürlichen Zahlen, und Q bei den Folgen der Quersummen der Potenzen von n mit x > 1, genannt $Qn^{x,}$ um Einzelwerte aus der jeweiligen Folge oder diese als Ganze zu bezeichnen. Als interessante Derivate erwiesen sich unter anderem unterschiedliche Internonarsummen (INRS) und deren Quersummen (s. Abschnitt 4). Auch das Ergebnis der Quersummation von INR oder den verschiedenen INRS wird mit "Q" gekennzeichnet: QINR bzw. QINRS.

Im Hinblick auf die Bedeutung, die Palindrome in der Molekularbiologie erlangt haben, z. B. als Substratstrukturen für die sequenzspezifische Spaltung von DNA durch die sog. Restriktionsendonukleasen Typ 2, aber auch als Aminosäuresequenzen in bestimmten Proteinen, wurde solchen spiegelsymmetrischen Abschnitten in den verschiedenen Zahlenfolgen besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Da in der Mathematik das Palindrom als spiegelsymmetrische Ziffernfolge einer Zahl definiert ist und nicht als spiegelsymmetrische Sequenz von Zahlen, wird in der vorliegenden Studie der Begriff "palindromische Anordnung" bevorzugt. Die Abkürzung hierfür lautet "PA" für den Singular und "PAn" für den Plural. Damit wird auch vermieden, die einstellige Zahl, welche in die mathematische Definition des Palindroms einbezogen ist, zu berücksichtigen, was ja mit "Anordnung" nicht vereinbar wäre. Als einfachste PA gilt in dieser Studie das Paar aus gleichen Zeichen.

Es leuchtet ein, daß man für die Analyse einer Sequenz mit Triplettstruktur nicht eine Folge von 100 Elementen als Untersuchungseinheit verwendet. Die Analyse bestimmter Merkmale der Qn^x-Folgen, wie z. B. Nachbarschaftsbeziehungen oder PAn unterschiedlicher Genese, erfolgte deshalb zunächst bis zur Position 408 von n jeweils in den folgenden vier Schritten:

Positionen	1 – 102	Tripletts	1 – 34
Positionen	103 – 204	Tripletts	35 - 68
Positionen	205 – 306	Tripletts	69 –102
Positionen	307 – 408	Tripletts	103 – 136

Vom Stichprobenumfang ist die Anzahl <u>verschiedener</u> Elemente zu unterscheiden, die in der jeweiligen Stichprobe vorkommen. So enthält z. B. der initiale, 23 Positionen lange Abschnitt der Folge Qn^4 (siehe: im folgenden Abschnitt gezeigte Beispiele) die 12 verschiedenen Elemente: 1 / 7 / <u>9</u> / 10 / 13 / 16 / <u>18</u> / 19 / 22 / 25 / <u>27</u> / 31, darunter die Nonare 9, 18 und 27.

2 Die Triplettstruktur der durch Potenzierung und Quersummation erhaltenen Zahlenfolgen

Erhebt man die natürlichen Zahlen n in die zweite, dritte, vierte, fünfte, sechste und siebte Potenz (höhere Potenzen konnten noch nicht einbezogen werden), und bildet die Quersummen Q der erhaltenen Zahlen, so entstehen Zahlenfolgen, die in Tripletts gegliedert sind, da jede 3., 6., 9. usw. Position von einer durch 9 teilbaren Zahl eingenommen wird. Die folgenden Anfangssequenzen der qn- und Qn^x-Folgen zeigen diese Triplettstruktur bei x > 1:

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23...
qn:	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	2	3	4	5...
Qn^2	1	4	**9**	7	7	**9**	13	10	**9**	1	4	**9**	16	16	**9**	13	19	**9**	10	4	**9**	16	16...
Qn^3	1	8	**9**	10	8	**9**	10	8	**18**	1	8	**18**	19	17	**18**	19	17	**18**	28	8	**18**	19	17...
Qn^4	1	7	**9**	13	13	**18**	7	19	**18**	1	16	**18**	22	22	**18**	25	19	**27**	10	7	**27**	22	31...
Qn^5	1	5	**9**	7	11	**27**	22	26	**27**	1	14	**27**	25	29	**36**	31	35	**45**	37	5	**18**	25	29...
Qn^6	1	10	**18**	19	19	**27**	28	19	**18**	1	28	**45**	37	37	**27**	37	37	**18**	37	10	**36**	37	46...
Qn^7	1	11	**18**	22	23	**36**	25	26	**45**	1	38	**36**	40	23	**45**	43	35	**18**	55	11	**36**	58	41...

In anderen als der dritten Position jedes Tripletts kommen die 9 und ihre Multiplen – also die Nonare – nicht vor. Ihr Anteil an den Qn^x-Werten (x > 1) ist somit mehr als dreimal höher als ihr Anteil an den natürlichen Zahlen (11%). Die Folge der Quersummen der natürliche Zahlen (qn^1) enthält im Intervall von 1 bis 408 nur 45 Nonare (35 mal 9 und 10 mal 18).

Die verschiedenen Folgen der Qn^x-Werte (x > 1) zeigen also eine Periodizität von Einheiten aus je einem Nonar, der auf zwei "Internonare" (INR) folgt. Im Rahmen dieser Studie wurde die Gültigkeit dieser Triplettregel anhand zahlreicher Stichproben bis n = 10 000 nachgewiesen; die folgende Tabelle belegt dies für das Ende dieses Intervalls. Um die Erkennung der Nonare zu erleichtern, sind in dieser Tabelle die Quersummen der Qn^x-Werte, also die QQn^x-Werte aufgeführt.

Triplettperiodizität in den letzen 29 der 10 000 verfügbaren Positionen der QQn^x-Folgen

n/x	2	3	4	5	6	7
9972	9	9	9	9	9	9
9973	10	10	10	10	10	10
9974	13	8	16	5	10	11
9975	9	9	9	18	9	9
9976	7	10	13	7	10	4
9977	7	8	13	11	10	5
9978	9	9	9	9	9	9
9979	4	10	16	4	10	7
9980	10	8	10	8	10	8
9981	9	9	9	9	18	9
9982	10	10	10	10	10	10
9983	13	8	7	14	10	11
9984	9	9	9	9	9	9
9985	7	10	13	16	10	4
9986	7	8	13	11	10	5

n/x	2	3	4	5	6	7
9987	9	9	9	9	18	9
9988	4	10	7	13	10	7
9989	10	8	10	8	1	8
9990	9	9	9	9	9	9
9991	10	10	10	1	10	10
9992	4	8	16	14	10	11
9993	9	9	9	9	9	9
9994	7	10	13	16	10	4
9995	7	8	13	2	1	14
9996	9	9	9	9	9	9
9997	4	10	16	4	1	7
9998	10	8	10	8	10	8
9999	9	9	9	9	18	9
10000	1	1	1	1	1	1

Mit der in dieser Studie näher charakterisierten Folge Qn^x wurde eine willkürliche Auswahl getroffen, denn alle Folgen an^x und Qan^x (a: ganze Zahl) zeigen eine durch die Anordnung der Nonare gekennzeichnete Triplettperiodizität. Wir beschränken uns hier also auf die Folgen mit a = 1 und verwenden als zweite Rechenoperation die einfache Quersummation.

3 Palindromische Anordnungen (PAn) in den Qn^x-Folgen und daraus extrahierten Nonar- und Internonarfolgen

Spiegelsymmetrische Zeichensequenzen haben seit langer Zeit besondere Aufmerksamkeit erweckt. Es sei hier nur an das berühmte "Arepo-Palindrom" erinnert, das auf einem pompejanischen Fresco entdeckt wurde ("SATOR AREPO TENET OPERA ROTAS"). Aber auch in der Alltagssprache erregen diese Gebilde Interesse, sei es in der Form einfacher Namen, wie ANNA und OTTO, oder als Erfindungen meist erheiternder Aussagen.

Es schien von Interesse, die hier diskutierten Zahlenfolgen und ihre Derivate auf PAn hin zu überprüfen. Die hierfür erhobenen Parameter sind: Die Anzahl der PAn im jeweils erfaßten Abschnitt, der bei den Qn^x-Werten in der Regel die Positionen 1 bis 408 umfaßt, und der Anteil der palindromisch angeordneten Positionen, also derjenigen Werte, die in den PAn enthalten sind; in diesen Parameter gehen die Längen der PAn ein.. Bei der Zählung der PAn wurde das Paar gleicher Zahlen als kleinste PA gewertet. Monotone Folgen, die aus einer Zahl oder aus zwei alternierenden Zahlen bestehen und damit vielfache willkürliche PA-Zuordnungen zulassen, bis hin zur ganzen Folge als größtmöglicher PA, werden nicht als palindromhaltig angesehen.

Für die Berücksichtigung überlappender palindromischer Anordnungen (PAn) bestand die Bedingung, daß sie mit einem Ende in nicht-palindromische Sequenzen oder in den Bereich einer anderen PAn hineinragt. Kleine PAn innerhalb eines großen, die nicht den selben Scheitel haben wie letztere, sind nicht beobachtet worden. Die kleinen PAn gleichen Scheitels innerhalb eines großen wurden nicht gesondert gezählt. Bei der Ermittlung der Anzahl palindromisch angeordneter Positionen wurden die Werte überlappender Abschnitte nur einmal gezählt. Die Erhebung der PAn erfolgte an jeweils gleich langen Abschnitten der Qn^x-Folgen, sowie an den aus diesen extrahierten Folgen der Nonare und der Internonare mit ihrem Stichprobenumfang von 136 bzw. 272 Positionen (136 + 272 = 408). Da die Wahrscheinlichkeit von PAn bei gegebenem Stichprobenumfang mit zunehmender Anzahl darin enthaltener verschiedener Werte abzunehmen scheint, sind auch deren Mengen jeweils angegeben. Auch an den Folgen definierter Summen NR-flankierender INR wurden diese Parameter (PAn und palindromisch angeordnete Elemente) erhoben.

3.1 Palindromische Anordnungen in den Qn^x-Folgen

Nur die Folgen mit geradzahligem Exponent (Qn^2, Qn^4 und Qn^6) enthalten palindromische Anordnungen. Ihre Anzahlen und einige Charakteristika sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

PAnTab1: PAn der Qn^x-Folgen im Bereich n = 1 bis n = 408

Nur die Qn^x-Folgen mit geradzahligem x enthalten Qn^x-PAn

x	Anzahl verschiedener Qn^x-Werte	PAn Anzahl	PAn Längen	Anzahl und Anteil der Qn^x-Werte in PAn	
2	18	34	2 - 13	136	33,33%
3	17	0	-	-	-
4	29	26	2 - 5	76	18,60%
5	56	0	-	-	-
6	21	47	2 - 5	130	34,56%
7	65	0	-	-	-

PAn mit mehr als 5 Positionen finden sich nur in der Folge mit dem kleinsten geradzahligen Exponent. Die Anzahl einander überlappender PAn ist mit 2, 0 und 4 in allen drei Folgen gering. Im Scheitel aller PAn ungeradzahliger Länge steht ein Nonar; eine zwingende Konsequenz der Triplettstruktur. Das Zentrum der geradzahligen PAn bilden zwei gleiche INR. Das Fehlen von PAn bei den Folgen mit $x = 2n \pm 1$ ist mathematisch begründbar (H. Maier 2009, persönliche Mitteilung; siehe auch Abschnitt 5.3).

Daß die beiden Folgen, Qn^2 und Qn^6, mit den geringeren Anzahlen verschiedener Qn^x-Werte die höheren Anzahlen von PAn und palindromisch angeordneten Qn^x-Werten zeigen, entspricht der Erwartung, denn in einer Stichprobe definierter Länge L und einer bestimmten Anzahl (< L) verschiedener Elemente nimmt die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens zweier benachbarter gleicher Elemente mit der Häufigkeit dieses Elements in der Menge der verfügbaren verschiedenen Elemente zu. Außer von der Anzahl verschiedener Elemente in der jeweiligen Stichprobe wird die Anzahl von PAn und von palindromisch angeordneten Qn^x-Werten auch von anderen, z. B. exponent-spezifischen Charakteristika der Folgen Qn^2, Qn^4 und Qn^6 abhängen.

Die Frage nach der Stärke einer negativen Korrelation zwischen den Parametern: Anzahl der PAn bzw. der darin vorhandenen Qn^x-Werte einerseits und der Anzahl verschiedener Elemente andererseits, wird also durch Vergleiche zwischen Abschnitten ein und derselben Folge zu beantworten sein, die sich signifikant in dem letztgenannten Parameter unterscheiden. *Eine Methode zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Entstehung der drei Ensembles von PAn (hinsichtlich ihrer Anzahlen, Längen und Positionen) in Qn^x-Zahlenfolgen mit geradzahligem x der Länge 408 mit den angegebenen Mengen verschiedener Elemente, bleibt zu entwickeln*.

Um einen Eindruck von der Variabilität der genannten Parameter innerhalb je einer der Folgen mit x = 2, = 4 und = 6 zu gewinnen, wurde die Stichprobe auf 816 verdoppelt, und die Parameter wurden in jeder der 8 Abschnitte zu 102 Positionen getrennt bestimmt. In den Tabellen PAn2, PAn3 und PAn4 sind die Ergebnisse zusammengefaßt.

Es bedeuten:
"ΣQn^x in PAn", Anzahl der von den PAn im jeweiligen Abschnitt in Anspruch genommenen Qn^x-Werte;
"E", Anzahl der verschiedenen Elemente im jeweiligen Abschnitt;
"Längenbereich", Längen der kürzesten und längsten PAn.

Tab.PAn2, x = 2

Abschnitt	PAn	Σ Qn^2 in PAn	E	Längenbereich
1 - 102	9	36	13	2 - 6
103 - 204	9	43	14	2 - 13
205 - 306	10	30	13	2 - 6
307 - 408	5	16	15	2 - 5
409 - 510	12	43	15	2 - 11
511 - 612	8	28	14	2 - 5
613 - 714	7	26	15	2 - 7
715 - 816	11	42	14	2 - 9
x ± σ	8,9 ± 2,3	33,0 ± 9,7	14,1 ± 0,8	

Tab.PNa3, x = 4

Abschnitt	PAn	Σ Qn^4 in PAn	E	Längenbereich
1 - 102	4	14	21	2 - 5
103 - 204	9	25	21	2 - 4
205 - 306	7	21	21	2 - 5
307 - 408	6	16	23	2 - 3
409 - 510	3	9	21	2 - 4
511 - 612	7	21	24	2 - 4
613 - 714	5	16	23	2 - 5
715 - 816	5	14	23	2 - 5
x ± σ	5,8 ± 1,9	16,7 ± 5,0	22,1 ± 1,2	

Tab.PAn4, x = 6

Abschnitt	PAn	Σ Qn^6 in PAn	E	Längenbereich
1 - 102	12	39	16	2 - 5
103 - 204	13	39	15	2 - 5
205 - 306	11	32	17	2 - 5
307 - 408	9	28	14	2 - 5
409 - 510	9	32	17	2 - 7
511 - 612	9	25	15	2 - 5
613 - 714	7	19	17	2 - 4
715 - 816	11	37	16	2 - 7
x ± σ	10,1 ± 1,9	30,8 ± 7,0	15,9 ± 1,1	

Man erkennt, daß in allen drei Folgen gleiche Werte von E mit der ganzen Variationsbreite der anderen beiden Parameter verbunden sein können. Der Vergleich der drei Tabellen bestätigt zwar, daß die geringste Zahl von PAn mit der größten Zahl von E einhergeht, nämlich bei der Folge Qn^4. Innerhalb der Folgen jedoch scheint weitgehend unabhängige Variabilität der verschiedenen Parameter vorzuherrschen. Dies spricht dafür, daß der ausgeprägte Unterschied zwischen den Folgen Qn^4 einerseits und Qn^2/Qn^6 andererseits auf exponentspezifischen Eigenschaften dieser Folgen beruht. Aufgrund der erstaunlich geringen Variabilität des Parameters E in jeder der drei Folgen eignen sich diese Daten nicht für den Nachweis der (vermutlich negativen) Korrelation zwischen PAn und E.

3.2 Palindromische Anordnungen der aus den Qn^x-Folgen extrahierten Nonarfolgen

Der bemerkenswerte Unterschied hinsichtlich des Vorkommens von PAn zwischen den Qn^x-Folgen mit geradem und ungeradem Exponent wirft die Frage auf, ob sich auch Derivate aus diesen Folgen entsprechend unterscheiden. Das nächstliegende Derivat ist die Folge der Nonare. Die Eigenschaften der aus den sechs Qn^x-Folgen extrahierten Nonarfolgen (im folgenden als $NRQn^x$-Folgen bezeichnet) zeigt die nächste Tabelle (PAn5).

Tab.PAn5: PAn der aus den Qn^x-Folgen extrahierten Nonaranordnungen ("$NRQn^x$") im Bereich n = 1 bis n = 408 (entspricht 136 NR)

Folgen x	Anzahl und Art der NR	PAn Anzahl	PAn Längen	palindromische Positionen Anzahl	palindromische Positionen Anteil	Überlappungen
2	4 (9 bis 36)	35	2 -11	128	94,1%	21
3	5 (9 bis 45)	38	2 – 8	114	83,8%	16
4	6 (9 bis 54)	36	2 – 7	103	75,7%	10
5	9 (9 bis 81)	34	2 - 7	103	75,7%	11
6	10 (18 bis 99)	29	2 - 5	73	53,7%	5
7	11 (18 bis 108)	26	2 - 7	82	60,3%	6

Im Gegensatz zu den Qn^x-Folgen (mit geradzahligem Exponent), kommen PAn in den $NRQn^x$-Folgen mit x-Werten beiderlei Geschlecht vor. Ihre Anzahl liegt bei letzteren, trotz der um den Faktor 3 geringeren Länge (136 vs. 408), in der gleichen Größenordnung (26 bis 38 vs. 34 bis 47), d. h., bezogen auf ihre Länge, ist die Häufigkeit von PAn in den NR-Folgen um den Faktor 3 (genauer: 3,2) größer als in den Qn^x-Folgen mit x = 2n . Von x > 4 an zeichnet sich eine Tendenz zu abnehmenden Anzahlen von PAn und von palindromischen Positionen mit zunehmendem x ab. Diese auffälligen Unterschiede zwischen den PAn der Qn^x- und der $NRQn^x$-Folgen beruhen vermutlich z. T. auf der geringeren Anzahl der verschiedenen Zeichen (maximal elf NR vs. maximal 65 Qn^x-Werte, siehe PAn.Tab1) und, wie gesagt, auf der geringeren Länge (~ ⅓) der $NRQn^x$-Folgen im Vergleich mit den Qn^x-Folgen. Die Anzahlen von PAn innerhalb der Gruppe der $NRQn^x$-Folgen sind nicht streng, aber der Tendenz nach, negativ mit den Anzahlen der verschiedenen Elemente (NR) korreliert; das gilt auch für die Anzahlen der palindromisch angeordneten NR. In beiden Stichproben überwiegen die zwei- und dreistelligen Palindrome mit 70,6% (Qn^x-Folgen) und 69,5% ($NRQn^x$-Folgen).

3.3 Palindromische Anordnungen der aus den Qn^x-Folgen extrahierten Internonarfolgen

In Analogie zur "Extraktion" der $NRQn^x$ aus den Qn^x-Folgen, können auch $INRQn^x$-Folgen, hier durch Extraktion der je 272 INR pro 408 Positionen der Qn^x-Folgen, gewonnen und u. a. auf palindromische Anordnungen hin untersucht werden. An den in der Tabelle "PAn.Tab6" zusammengefaßten Daten fällt zuerst die Uneinheitlichkeit der $INRQn^x$-Folgen mit ungeradem Exponent auf: Anders als bei den Qn^x-Folgen, wo alle drei Folgen mit ungeradzahligem x frei von PAn sind (s. PAn.Tab1), fehlen diese hier nur bei x = 5 und x = 7. Das sind die beiden Folgen mit im Mittel mehr als vier mal so vielen verschiedenen Elementen (INR; im Mittel 50 vs.12; s. Spalte 2) im Vergleich zur $INRQn^3$-Folge.

PAn.Tab6: PAn der aus den Qn^x-Folgen extrahierten INR-Folgen ("$INRQn^x$") im Bereich n = 1 bis n = 408, entspr. 272 INR.

Folgen x	Anzahl verschied. INR	PAn Anzahl	Längen	palindromische Positionen Anzahl	Anteil	Überlappungen
2	14	32	2 - 8	111	40,8 %	2
3	12	51	3 - 9	182	66,9 %	3
4	23	26	4 - 6	63	23,2 %	1
5	47	0	-	0	-	-
6	11	73	2 - 8	159	58,4%	26
7	53	0	-	0	-	-

Auf die Ähnlichkeit der $INRQn^x$-Folgen mit x = 3 und x = 6 hinsichtlich der Anzahlen der PAn und der palindromisch angeordneten Positionen sei hier nochmals hingewiesen.

Während die Längen der PAn der drei Qn^x-Folgen mit geradzahligem Exponent und der PAn der extrahierten Nonaranordnungen sowohl geradzahlig als auch ungeradzahlig sein können, erweisen sich die Längen der PAn von drei der vier PAn-haltigen $INRQn^x$-Folgen als in dieser Hinsicht einheitlich, wie die Zusammenstellung der folgenden Tabelle belegt:

PAn.Tab7: Die Längenverteilung der PAn der $INRQn^x$-Folgen, in denen solche vorkommen (Länge = Anzahl der INR in der PAn)

Längen	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
x = 2	14		14		2		2		32
x = 3		38		8		3		2	51
x = 4	21		4		1				26
x = 6	32	22	8	5	1	2	1		71

Zwei der drei Folgen mit geradzahligem Exponent (x = 2 und x = 4) enthalten nur geradzahlige palindromische Anordnungen; die Folge aus x = 6 sowohl gerad- als auch ungeradzahlige; der Exponent x = 3 ist hier mit einheitlich ungeradzahligen PAn-Längen verbunden. Im Gegensatz dazu enthalten alle 6 $NRQn^x$-Folgen PAn-Längen beiderlei Geschlechts.

4 Eigenschaften der Internonare und der aus diesen gebildeten Internonarsummen

In diesem vierten Abschnitt sollen die INR der Qn^x-Folgen darauf hin untersucht werden, ob sie, in Abhängigkeit von der Größe des Exponenten x, gewissen Gesetzmäßigkeiten unterliegen. Zu diesem Zweck werden zunächst die Anzahlen der in den Qn^x-Folgen vorkommenden verschiedenen INR-Werte ermittelt und sodann, durch eine nochmalige Quersummation, Verwandtschaftsbeziehungen innerhalb der INR jeder Folge analysiert. Letzterem liegt die Tatsache zugrunde, daß die Quersummation die Vielfalt einer Menge verschiedener Zahlen um so stärker verringert, je mehr Zahlen gleicher Quersumme darin vorkommen. Art und Anordnung der verschiedenen Quersummen lassen gewisse Strukturen der ursprünglichen Zahlenfolgen leicht erkennen, die dem Blick auf diese selbst entgehen, und die Reduktion der Vielfalt verschiedener INR durch die Quersummation bietet ein Maß der Verwandtschaft zwischen diesen Werten. Hierfür ziehen wir den "Reduktionsfaktor" (RF) heran, mit dem die Anzahl verschiedener INR zu multiplizieren ist, um die Anzahl ihrer verschiedenen Quersummen (QINR) zu erhalten:

{Verschiedene INR} • RF = {verschiedene QINR}.

Es darf zuvor noch einmal daran erinnert werden, daß auch die dem ersten Nonar jeder Qn^x-Folge vorausgehenden Zahlen zu den Internonaren gezählt werden; dies sind die erste und zweite Zahl des jeweils ersten Tripletts der Folgen von Qn^x-Werten mit den Exponenten > 1, und die acht Zahlen vor der Neun in der Folge der qn-Werte der natürlichen Zahlen (x = 1).

4.1 Erkennung von Ordnung und Ähnlichkeit durch Reduktion der Vielfalt

Die folgende Tabelle (INR.Tab1) gibt eine Übersicht zu den Anzahlen der unter den je 272 INR- und QINR-Werten im jeweiligen Abschnitt von n = 1 bis n = 408 der Qn^x-Folgen vorkommenden verschiedenen INR und ihren Quersummen QINR und vermittelt das Ausmaß der Verminderung der Vielfalt der Werte durch die nochmalige Quersummation:

INR.Tab1

(Reduktionsfaktor* RF; Zufallszahlen ZZ)

x	2	3	4	5	6	7	ZZ
INR	14	12	23	47	11	53	100
QINR	4	3	6	12	2	12	
RF*	0,2857	0,25	0,2611	0,2551	0,1818	0,2264	> 0,8**

*) Faktor, mit dem die Anzahl verschiedener INR zu multiplizieren ist, um die Anzahl verschiedener QINR-Werte zu erhalten. Exponenten: x = 2 bis 7; Mittelwert und Standardabweichung der RF-Werte: 0,243 ± 0,035.

**) Bei der Bestimmung des RF an 10 Folgen von je 10 verschiedenen ZZ variierte der RF zwischen 0,6 und 1,0; Mittelwert und Standardabweichung: 0,82 ± 0,14

Man erkennt die breite Variabilität dieser Parameter unter den 6 verschiedenen QINR-Folgen und die - gegenüber vergleichbaren Mengen verschiedener Zufallszahlen - viel stärkere Reduktion der Vielfalt durch Quersummation, was bereits als Hinweis auf eine gewisse Strukturierung der QINR-Folgen gedeutet werden kann. Ein Vergleich der linguistischen Komplexitäten (LC) der beiden Folgen (INR und QINR) ergäbe dafür vermutlich einen spezifischeren Beleg.

Ein erster Schritt zum Nachweis einer geordneten Struktur der INR-Folgen ist also die Analyse der Quersummen (QINR) der INR. Zur Veranschaulichung der Vorgehensweise sei ein Ausschnitt aus dem Zahlenmaterial der Qn^3-Folge gezeigt:

n	n^3	Qn^3	QINR
6	216	9	-
7	343	10	1
8	512	8	8
9	729	18	-
10	1000	1	1
11	1331	8	8
12	1728	18	-
13	2197	19	10
14	2744	17	8
15	3375	18	-

In dem nebenstehenden Ausschnitt folgen dem NR des zweiten Tripletts von Qn^3 die Tripletts 3, 4 und 5

Wertet man die sechs Folgen mit x > 1 in dieser Weise aus, so fällt auf, daß die Ordnungsprinzipien bei den Folgen mit ungeradzahligem bzw. geradzahligem Exponent charakteristische Unterschiede aufweisen. Die Folgen mit x = 3, 5 und 7 sind durch je eine repetitive QINR-Sequenz charakterisiert, die als wiederholte Einheit, mit einer leichten Variabilität an bestimmten Stellen, die ganze Länge des Intervalls der jeweiligen Folge ausfüllt:

x = 3; 1 / 8 / 1 / 8 / 1 / 8 Variante: 10 / 8 (siehe auch den oben gezeigten Ausschnitt)
x = 5; 7 / 11 / 13 / 8 / 10 / 5 Varianten: 7 / 11 / 4 / 8 / 10 / 5 oder 7 / 11 / 4 / 8 / 10 / 14 etc.
x = 7; 10 / 11 / 4 / 5 / 7 / 8 etc. Varianten: 1 / 11 / 4 / 14 / 7 / 8; 10 / 2 / 13 / 5 / 7 / 8 etc.

Man erkennt sogleich, daß die Varianten (grau unterlegt) durch Austausch bestimmter Zahlen gegen solche gleicher Quersumme entstehen.

Die QINR-Folgen aus x = 5 und x = 7 sind mit ihren sechsstelligen repetitiven Einheiten völlig frei von palindromischen Anordnungen. Bei der QINR-Folge mit x = 3 besteht die Möglichkeit, aus einer Folge von zwei verschiedenen Paaren alternierender Zahlen ad libitum ungeradstellige PAn auszuschneiden. Beispiele sind die folgenden 3-, 5- und 21-stelligen PAn:

8-1-8 oder 8-10-8-10-8 oder 1- 8-10-8-10-8-10-8-10-8-10-8-10-8-10-8-10-8-10-8-1

Diese Situation ist vergleichbar mit derjenigen, die bei einer monotonen Folge aus nur einer Zahl besteht (wie zum größten Teil bei der QINR-Folge aus x = 6; s. u.). Es erscheint deshalb berechtigt, diese drei durch x = 2n ± 1 gekennzeichneten QINR-Folgen als frei von palindromischen Anordnungen anzusehen.

Die QINR-Folgen mit x = 2 und 4 sind demgegenüber ausgesprochen palindromisch angelegt, wie es die Sequenzen der repetitiven Einheiten erkennen lassen:

x = 2 10 / 4 / 7 / 7 / 4 / 10 ...
Varianten: 1 / 4 / 7 / 7 / 4 / 1, 10 / 4 / 7 / 7 / 4 / 1 und 1 / 4 / 7 / 7 / 4 / 10 ...
Die vierstellige PA: 4 / 7 / 7 / 4, ist über die ganze Länge der Qn^2-Folge vollständig konserviert!

x = 4 10 / 7 / 4 / 4 / 7 / 10 ...
Varianten: 1 / 7 / 4 / 4 / 7 / 1 und Analoga zu obigen Sequenzen. Aber auch die 4 wird mit fortschreitenden Positionen substituiert: 10 / 7 / 13 / 4 / 7 / 10; es besteht hier also nur eine Konservierung einer Art strukturpalindromischer Anordnung, wenn man der 4 und der 13 als quersummengleichen Zahlen ein gleiches Symbol, z. B. "a" zuordnet :
10 / 7 / a / a / 7 / 10.
Durch die häufige Gleichheit der Enden der palindromischen repetitiven Einheiten dieser beiden QINR-Folgen, können vielstellige palindromische Anordnungen gebildet werden, und die überwiegende Mehrheit der Werte ist Bestandteil solcher PAn.
Bemerkenswert sind die Gleichheit der Ziffern der beiden repetitiven Einheiten der QINR-Folgen aus x = 2 und x = 4 und ihre durch Permutation auseinander hervorgehenden Anordnungen.

x = 6 Die 272 QINR-Positionen sind 6 mal mit 1 und 266 mal mit 10 besetzt. Da vier der Werte 1 im Inneren der Folge liegen (nämlich an den Positionen n = 10, = 20, = 100 und = 200), können diese als die Scheitel oder die Flanken von z. T. sehr großen Palindromen mit Strukturen wie:
... 10 / 10 / 10 / 1 / 10 / 10 / 10 ...oder 1 / 10 / 10 / 10 / ... / 10 / 10 / 10 / 1
angesehen werden, die jedoch nicht zwingend ein bestimmtes Anordnungsmuster bilden. Folglich gilt hier die gleiche Betrachtung, wie sie im Falle der Folge aus x = 3 angestellt wurde, und die Folge aus x = 6 ist als frei von klar definierbaren palindromischen Anordnungen zu beurteilen.

Aus der Tabelle PAn.Tab6 war hervorgegangen, daß sich die $INRQn^x$-Folgen mit x = 3 und x = 6 in ihrem kleinen Inventar an verschiedenen INR-Werten bei besonders hohen Anzahlen von PAn ähnlich sind. Wie die obigen Daten zeigen, haben die entsprechenden QINR-Inventare den Umfang von nur drei bzw. zwei Werten: 1, 10 und 8 bzw. 1 und 10, womit den INR-Werten dieser Folgen jeweils ein hoher Verwandtschaftsgrad (im Sinne des gewählten Kriteriums "Quersumme") bestätigt wird.

Zusammengesehen zeigen auch diese Ergebnisse, daß man mit Hilfe der Kombination der beiden Rechenoperationen – Potenzierung und Quersummation – eine für den jeweiligen Exponent spezifische Auswahl aus der Menge der ein- und zweistelligen Zahlen trifft; den verschiedenen Folgen ist also ein gewisser Grad von "Exponentspezifität" eigen. Andererseits zeichnen sich Ähnlichkeiten ab, welche eine Zuordnung der sechs Folgen zu den folgenden drei Paaren zu rechtfertigen scheinen:
a) x = 2 und 4; b) x = 3 und 6; c) x = 5 und 7.

4.2 Eigenschaften der Internonarsummen Typ1 und Typ2

Als weitere "Derivate" der Qn^x-Folgen sollen nun Internonarsummen ("INRS") herangezogen werden. Es sind zwei Typen von INRS zu unterscheiden; erstens: Das Ergebnis der paarweisen Addition der jedem NR (bei Exponenten >1) vorausgehenden zwei INR, genannt Internonarsummen Typ I (INRS1); zweitens: Das Ergebnis der Addition der jeweils vier INR, die einen Qn^x-Nonar beidseitig flankieren, genannt Internonarsummen Typ II (INRS2). Ein dritter Typus von INRS (INRS3) ist nur für die Folgen der Qn^5- und Qn^7-Werte von Interesse; er resultiert aus der Addition der INRS1, welche diejenigen INRS1 flankieren, die bei diesen Folgen Nonare sind (s. **Beispiele**). Als Parameter für die Analyse der INR-Folgen auf dieser Ebene wurde zunächst die Internonarsumme vom Typ I (INRS1) verwendet. Die Ergebnisse sind im folgenden zusammengefaßt. Auch in diesem Kontext werden für jeden Wert von x (Exponent, von 1 bis 7) sowohl die in der jeweiligen INRS1-Folge vorkommenden INRS1-Werte als auch deren Quersummen aufgelistet. Hinzu kommen die Differenzen zwischen den aufeinander folgenden Werten, welche sich als auffällig einheitlich erweisen werden (Stichwort: "Monotonie der Quersummen"), und die jeweilige Anzahl verschiedener unter den (bei x > 1) 136 INRS1-Werten im Intervall von 1 – 408 Positionen.

Beispiele für die verschiedenen Internonarsummen:

n	Qn^3	INRS1	INRS2	Qn^5	INRS1	INRS2	INRS3
1	1			1			
2	8	**9**		5	6		
3	9		**27**	9		24	
4	10			7			
5	8	**18**		11	**18**		**54**
6	9		**36**	27		66	
7	10			22			
8	8	**18**		26	48		
9	18		**27**	27		**63**	
10	1			1			
11	8	**9**		14	15		
12	18		**45**	27		69	
13	19			25			
14	17	**36**		29	**54**		**81**
15	18		**72**	36		120	
16	19			31			
17	17	**36**		35	66		
18	18		**72**	45		**108**	
19	28			37			
20	8	**36**		5	42		

Die Nonare der Qn^x-Folgen sind unterstrichen (man beachte die Triplettstruktur), die Nonare der INRS-Folgen sind **fett** gedruckt

4.2.1 Die INRS1 aus der Folge der Quersummen der natürlichen Zahlen; Positionen 1 - 408.

In diesem Intervall gibt es 45 Nonare und ebenso viele INR-Oktette. Die aus Letzteren entstehenden 45 verschiedenen INRS1 mit ihren Werten zwischen 36 und 3204 sind Nonare, die in der Reihenfolge ihres Erscheinens in der Folge um Stufen von 72 voneinander differieren.

Auf der hier interessierenden Ebene der Quersummen von n (qn^1, die Summanden sind also die qn-Werte) gibt es in diesem Intervall 11 verschiedene Werte von QINRS1, die natürlich ebenfalls Nonare sind. Die Quersummation der INRS1-Werte verringert also die Vielfalt um den Reduktionsfaktor 11 : 45 = 0,2444.

4.2.2 INRS1 und QINRS1 aus den dokumentierten Regionen von 408 Positionen der Folgen Qn^2 bis Qn^7

Diese enthalten je 136 Tripletts und ebenso viele INRS1, die durch die Addition der je zwei INR jedes Tripletts entstehen. Um alle INRS1 zu dokumentieren, bedürfte es also einer Tabelle mit mindestens 136 Zeilen. Da sich in jeder dieser Folgen von INRS1 gleiche Werte wiederholen, scheinen Größe (Wert) und Anzahl der verschiedenen INRS1, die jeweils auftreten, als Alternative die spezifischen Verhältnisse sinnvoll zu repräsentieren. Der häufige Kontrast zwischen der Vielfalt der INRS1 und der Monotonie ihrer Quersummen (QINRS1) wird auf diese Weise besonders deutlich. In der folgenden Zusammenstellung sind die jeweiligen Auflistungen der INRS1 also nicht die entsprechend den Positionen von "n" angeordneten "INRS1-Folgen"! Bezüglich der "Gruppen" oder "Mengen" verschiedener Werte innerhalb einer Stichprobe, seien es INRS1 oder deren Quersummen (QINRS1), darf der Begriff "Folge" nicht verwendet werden. Die Stichproben umfassen jeweils die 272 INR, entsprechend den 136 INRS1, im Abschnitt n = 1 bis n = 408 der Qn^x-Folgen.

a. Folge Qn^2:

INRS1	5	14	23	32	41	50	59	77	Anzahl 8; Differenzen: 9 und 18
QINR1	5	5	5	5	5	5	14	14	Anzahl 2; Differenz: 0 und 9

Weder die hier vorkommenden INRS1, noch ihre monotonen Quersummen (nur 2 verschiedene; RF = 0,25) sind durch drei teilbar. Dennoch erscheinen Nonare sowohl als die Differenzen zwischen den INRS1-Werten, als auch zwischen den beiden Quersummen.

b. Folge Qn³:

INRS1	9	18	36	45	54	63	72	81	90	Anzahl 9; Differenzen: 9
QINRS	9	9	9	9	9	9	9	9	9	Anzahl 1

Ununterbrochene Folge der Multiplen von "9" (Nonaren) als INRS1-Werte mit ihrer zu erwartenden einheitlichen Quersumme (RF = 0,111).

c. Folge Qn⁴:

INRS1	8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	Anzahl 13; Differenzen: 9
QINRS1	8	8	8	8	8	8	8	8	8	17	17	8	8	Anzahl 2; Differenz: 9

Analog zu Qn^2 : Keine Teilbarkeit durch drei in beiden, durch die Differenz 9 gekennzeichneten Zahlenreihen; abermalige Monotonie der Quersummen (RF = 0,154).

d. Folge Qn⁵:

INRS1	6	15	18	36	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90	93	96	99
QINRS1	6	6	9	9	6	9	12	6	9	12	6	9	12	15	9	12	15	9	12	15	9	12	15	18

…	102	105	108	111	114	117	120	123	126	129	132	135	138	141	147	150	156	**INRS1**
…	3	6	9	3	6	9	3	6	9	12	6	9	12	6	12	6	12	**QINRS1**

Anzahl: 41; Differenzen: 3 und Multiple von 3

Sprunghafter Anstieg der Anzahl vorkommender INRS1-Werte, die, wie auch ihre 6 verschiedenen Quersummen (3/6/9/12/15/18), Multiple von 3 sind. Nonare nehmen z. T. jede dritte Position in der Serie der nach ihrer Größe geordneten INRS1-Werte ein (siehe Beispiel der INRS, S. 15).
(RF = 0,146).

e. Folge Qn⁶:

INRS1	11	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173
QINRS1	2	11	11	11	11	11	11	11	11	2	2	11	11	11	11	11	11	11

Anzahl:18 INRS1; nur 2 QINRS1 (RF = 0,111); beide nicht durch 3 teilbar;
Differenzen: NR 9 und 18, bzw. 9; Monotonie der Quersummen.

f. Folge Qn^7:

INRS1	12	39	45	51	63	66	69	78	81	87	90	93	96	99	102	105	108	111	114	117	120	123	126	129 …
QINRS1	3	12	9	6	9	12	15	15	9	15	9	12	15	18	3	6	9	3	6	9	3	6	9	12 …

…	132	135	138	141	144	147	150	153	156	159	162	165	168	171	174	177	180	183	186 **INRS1**
…	6	9	12	6	9	12	6	9	12	15	9	12	15	9	12	15	9	12	15 **QINRS1**

Anzahl: 43; sprunghafter Anstieg der Anzahl der INRS1; 6 QINRS1 (RF = 0,1395), die Differenzen und die QINRS1-Werte sind 3 oder Multiple von 3.

Die obigen Datenzusammenstellungen bestätigen die allgemeine Regel, daß in diesem Zusammenhang Zahlen gleicher Quersumme um Nonare differieren.

Die tabellarische Zusammenfassung der Mengen der verschiedenen Elemente INRS1 und QINRS1 läßt die zu erwartenden Parallelen zu den Daten erkennen, die mit den INR und den QINR gewonnen wurden (vergl. INR.Tab1 mit INR.Tab2).

INR.Tab2: Anzahlen verschiedener Elemente der in Spalte 1 genannten Art und RF-Werte

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
INRS1	8	9	13	41	18	43
QINRS1	2	1	2	6	2	6
RF	0,250	0,111	0,154	0,146	0,111	0,139

Die größten Mengen verschiedener Elemente finden sich hier wie dort bei den INR und INRS1 der Folgen Qn^5 und Qn^7. Die Verhältnisse bei x = 3 fügen sich auch hier nicht in den Rahmen der anderen Folgen mit ungeradzahligem Exponent, sondern ähneln eher denen unter x = 6, einschließlich der besonders starken Reduktion der Vielfalt durch die Quersummation.

Interessant ist das häufige Hervortreten von Nonaren in irgend einer Form, auch wenn die INRS1- und die QINRS1-Werte selbst keine Nonare sind, wie bei den Folgen aus x = 2 und x = 4.

Bevor die Eigenschaften der INRS2 kurz zusammengefaßt werden, sollen auch die palindromischen Anordnungen (PAn) in den INRS1-Folgen berücksichtigt werden.

4.2.3 Palindromische Anordnungen bei den INRS1-Folgen mit x > 1

Die folgende Tabelle PAn.Tab.8 zeigt die Ergebnisse der Zählung von PAn in diesen 6 Folgen. Man erkennt auf den ersten Blick die qualitative Ähnlichkeit der Verteilung der PAn über die verschiedenen Folgen zu der an den INR-Folgen beobachteten (s. PAn.Tab.6). Die aus Qn^5 und Qn^7 hervorgegangenen Folgen beider Art sind frei von PAn und weisen zugleich die größten Anzahlen verschiedener INR- bzw. INRS1-Elemente auf. Das Fehlen einer stimmigen Korrelation zwischen Anzahlen der verschiedenen Elemente und Häufigkeiten der PAn und der so angeordneten Werte, läßt aber auch hier nicht den Schluß zu, daß die Abwesenheit von PAn allein auf letzterem Umstand (hohe Anzahl Verschiedener) beruhen könnte.

Der am stärksten zwischen den beiden Folgen-Kategorien übereinstimmende quantitative Parameter ist die Anzahl der verschiedenen Elemente (s. die zweiten Spalten der Tabellen), jedoch korrespondiert die überraschend geringe Anzahl der verschiedenen INRS1 bei x = 6 in viel geringerem Maße mit hohen Werten von PAn und palindromisch angeordneten Werten.

PAn.Tab. 8: PAn in den Folgen der Internonarsummen Typ 1 (INRS1)

erhoben an Stichproben aus den Qn^x-Folgen von je 1 bis 408, entsprechend je 136 INRS1-Werten

x	Anzahl verschiedener INRS1-Werte	PAn		palindromische INRS1-Werte		Überlappungen
		Anzahl	Längen	Anzahl	%	
2	8	42	2 - 5	110	80,7	17
3	9	39	2 - 8	114	83,8	14
4	13	35	2 - 5	86	63,2	13
5	41	0	-	-	-	-
6	18	18	2 - 5	49	36,0	3
7	43	0	-	-	-	-

4.3 INRS2 und QINRS2 aus den dokumentierten Regionen von 102 Positionen der Folgen Qn^2 bis Qn^7.

Die Internonarsummen Typ2 gehen aus der Addition der je vier einen Nonar flankierenden INR hervor. Damit alle Nonare erfaßt werden, muß überlappend, d. h. nach folgendem Schema addiert werden: rsNRtuNRvwNRxyNR...→ r + s + t + u = erste INRS2; t + u + v + w = zweite INRS2; v + w + x + y = dritte INRS2 usw.. Die INRS2 sind also Summen je zweier aufeinander folgender INRS1. Es resultieren bei den in diesem Zusammenhang ausgewerteten 102 Positionen von n je 34 INRS2-Werte. Auf die Dokumentation der jeweiligen Zahlenwerte wird in diesem Zusammenhang weitgehend verzichtet.

a. Qn^2; 1 – 102

Keine der INRS2 ist ein Nonar, aber die Differenzen zwischen ihnen sind die Nonare 9, 18 und 27. Die in diesem Intervall vorkommenden 9 verschiedenen INRS2- Werte haben alle die Quersumme 10; RF = 0,111. Die Folge der 34 INRS2-Werte enthält 9 palindromische Anordnungen, die 27 (79,4%) der 34 Positionen in Anspruch nehmen.

b. Qn^3; 1 – 102

In dieser Folge sind alle INRS1 Nonare und somit auch jedwede ihrer Summen, also auch die INRS2. Es kommen 11 verschiedene Nonare mit den Quersummen 9 bzw. 18 vor; RF = 0,1818. Die INRS2-Folge enthält 10 palindromische Anordnungen, die 26 der 34 Positionen (76,5%) besetzen.

c. Qn^4, 1 – 102

Keine der 15 verschiedenen INRS2 ist ein Nonar, jedoch sind die Differenzen dieser INRS2 die Nonare 9 oder 18. Die Quersummen sind monoton: 7 und 16, Differenz: 9 ! RF = 0,133. Die INRS2-Folge enthält 7 palindromische Anordnungen, auf die 18 der 34 Positionen verteilt sind (52,9%).

d. Qn^5, 1 – 102

Alle 25 verschiedenen INRS2-Werte sind durch drei teilbar; jede dritte INRS2 ist ein Nonar, der in der Folge der INRS2-Werte auch an jeder dritten Stelle steht. Quersummation reduziert auf 5 Werte; RF = 0,200. Diese Folge der INRS2 enthält, wie die einschlägige INR- und die zugehörige INRS1-Folge keine PAn.

e. Qn^6, 1 – 102

Keiner der vorkommenden 18 verschiedenen INRS2-Werte ist ein Nonar. Die Differenzen zwischen diesen INRS2-Werten sind Nonare. Die Quersummen der INRS2 sind monoton: 4 (10 mal) und 13 (24 mal), Differenz 9; RF = 0,111. Diese INRS2-Folge enthält 5 PAn, die 12 der 34 Positionen beanspruchen (35,3%).

f. Qn^7, 1 – 102

Alle INRS2-Werte von Qn^7 sind durch 3 teilbar, so daß auch die Differenzen Multiple von 3 sind. Jeder dritte dieser Werte ist ein Nonar. Auf den 102 Positionen von n kommen 29 verschiedene INRS2-Werte vor. Durch die Quersummation geschieht eine Reduktion auf die QINRS2-Werte: 3/6/9/12/15/18. Der RF ist demnach gleich 6 / 29 = 0,2069; eine vergleichsweise geringe Reduktion der Vielfalt. Die Folge der INRS2-Werte von x = 7 enthält keine palindromischen Anordnungen.

Anmerkung: Die an Internonarsummen Typ 2 erhobenen Befunde weisen viele Parallelen zu denen auf, die an INRS1 gewonnen wurden. Es zeichnet sich deutlich ab, daß die 6 Qn^x-Folgen aufgrund von Ähnlichkeiten mehrerer Parameter den drei oben erwähnten Paaren zugeordnet werden können: Exponenten: 2 und 4; 3 und 6; 5 und 7.

Die folgende Tabelle demonstriert dies noch einmal anhand der Parameter "Vielfalt der verschiedenen INRS2-, QINRS2-Werte" und "Reduktionsfaktor".

INR.Tab3

x	2	3	4	5	6	7
INRS2	9	11	15	25	18	29
QINRS2	1	2	2	5	2	6
RF	0,1111	0,1818	0,1333	0,2000	0,1111	0,2069

Die dennoch bestehenden Unterschiede zwischen den einander zugeordneten Folgen bestätigen andererseits, daß die entscheidende Determinante ihrer "Struktur" der individuelle Exponent (Wert von x) ist. So scheint ein systematischer Unterschied in der Höhe der RF-Werte zu bestehen, die aus den INRS2- und QINRS2-Werten berechnet wurden (s.INR.Tab3). Die Mittelwerte der je drei RF der INRS2-Daten mit gerad- bzw. ungeradzahligem x unterscheiden sich deutlich: x_{2n}: 0,1085 ± 0,0128; $x_{2n\pm1}$: 0,1962 ± 0,0130. Gleiches gilt nicht für die aus den INRS1- und QINRS1-Daten berechneten RF-Werte (s. INR.Tab2), wo sich eher x = 3 und 6 von den übrigen unterscheiden.

5 Ein kurzer Blick auf Nachbarschaftsbeziehungen

Die Triplettperiodizität der Qn^x-Folgen, deren Struktur man durch die abstrakte repetitive Einheit "INR/INR/NR" darstellen kann, erlegt einerseits der Struktur von palindromischen Anordnungen bestimmte Beschränkungen auf, zum anderen erlaubt sie die Unterscheidung von prä- und postnonar positionierten Internonaren, von denen lediglich der INR auf Position n = 1 ausgenommen ist, der unabhängig vom Exponent x den Wert 1 hat und keine der beiden Arten von Positionen einnimmt. Man kann also erstens fragen: Welche Arten von PAn sind unter der Vorgabe der Triplettperiodizität möglich?, und zweitens: Gibt es Regelmäßigkeiten bei der Verteilung der in einer Qn^x-Folge vorkommenden verschiedenen INR über diese beiden Arten (prä- bzw. postnonar) von Positionen?

5.1 Durch die Triplettperiodizität erzwungene Charakteristika der palindromischen Anordnungen in den Qn^x-Folgen mit geradzahligem x

Der besseren Lesbarkeit wegen, werden im folgenden die NR durch n und die INR durch i symbolisiert, das Triplett also durch i/i/n. Abstrakte Sequenzen von i und n, die PAn bei geeigneten Zahlenwerten von Qn^x <u>ermöglichen</u>, sind schattiert hervorgehoben. Die zur Veranschaulichung der Aussagen verwendeten symbolischen Darstellungen sind Leseraster, die in den von oben nach unten folgenden Zeilen jeder Stellenzahlspalte um eine Position von n nach rechts, also zur nächst höheren Position von n, in den Qn^x-Folgen verschoben sind.

a.) Im Scheitel aller PAn mit ungerader Stellenzahl steht ein NR; andere ungeradzahlige PAn sind ausgeschlossen. Dem entsprechend müssen alle fünfstelligen PAn von Nonaren flankiert sein, bei deren Gleichheit sich eine siebenstellige PA ergibt (s. dritte Spalte, letzte Zeile):

i / i / n	i / i / n / i / i	i / i / n / i / i / n / i
i / n / i	i / n / i / i / n	i / n / i / i / n / i / i
n/ i / i	n / i / i / n / i	n / i / i / n / i / i / n
3-	5-	7-stellige PA

b.) Von den drei in den Qn^x-Folgen möglichen Zahlenpaaren (i/i i/n n/i) kann nur das erste eine PA ergeben. NR sind von zweistelligen PAn ausgeschlossen. Alle zweistelligen PAn sind beidseitig von NR flankiert, bei deren Gleichheit eine vierstellige PA entsteht. Nur die letzte der drei möglichen vierstelligen Anordnungen kann PAn ergeben. Im Zentrum aller geradzahligen PAn steht ein Paar gleicher Internonare:

i / i	i / i / n / i	i / i / n / i / i / n	i / i / n / i / i / n / i / i
i / n	i / n / i / i	i / n / i / i / n / i	i / n / i / i / n / i / i / n
n / i	n / i / i / n	n / i / i / n / i / i	n / i / i / n / i / i / n / i
2-	4-	6-	8-stellige PA

Diese Modellbetrachtung zeigt: Unabhängig vom Geschlecht der Stellenzahl, gibt es bei Triplett-periodizität nur je drei mögliche Sequenzstrukturen pro Stellenzahl, d. h. mögliche Anordnungen von INR und NR. Von diesen bietet nur jeweils ein Drittel die Möglichkeit palindromischer Anordnungen mit eben dieser Stellenzahl. Im Falle von Zahlenfolgen anderer Periodizitäten herrschen diesbezüglich andere Verhältnisse.

5.2 Hinweise auf Regelmäßigkeiten in den Nachbarschaftsbeziehungen zwischen NR und INR

Im Verlauf der Auswertung der Zahlenkolonnen in den verschiedenen Zusammenhängen, über die hier berichtet wird, fielen immer wieder Zahlenpaare auf, die sich in einer oder auch in mehreren der Qn^x-Folgen wiederholen. Ohne Zweifel ließe sich mit Hilfe geeigneter Algorithmen eine Vielfalt regelmäßiger Nachbarschaftsbeziehungen dingfest machen und auf ihr Vorkommen in den verschiedenen Folgen prüfen. Zur Veranschaulichung seien hier zunächst zwei zufällig ausgewählte Beispiele beschrieben.

1.) Der Internonar 26 und sein zifferngleicher "Bruder", seine Permutation 62, kommen nur in den Qn^x-Folgen mit ungeradzahligen Exponenten vor und nehmen dort ausschließlich pränonare Positionen ein. Das fiel zuerst bei Untersuchungen an der Folge Qn^3/1 – 408 auf. Die Art des auf 26 oder 62 folgenden NR ist nicht beschränkt, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

Qn^3/1 - 408: Nachfolger von "26":

Position (n) der "26":	26*	29	32	35	38	41	44	56	59	62	65	71	77	86	98	104 …	
Nachfolger:	27	9	27	27	27	27	18	27	9	18	36	27	27	27	36	27 …	

…	125	128	131	137	143	152	158	161	164	185	194	210	224	236	245 …
…	18	36	45	27	45	36	36	27	27	36	36	27	27	18	45 …

…	251	260	272	281	284	290	308	317	320	350	371	374	380	401	**Position (n) der "26"**
…	18	45	27	36	27	27	27	27	27	45	45	36	27	45	**Nachfolger**

(* 26^3 = 17 576)

In der Folge Qn^3/1 – 408 geht der Qn^3-Wert "26" also bei 45 (33,1%) der 136 Nonare diesen voraus. In anderen Positionen dieser Folge tritt die "26" nicht auf, d. h., daß alle Werte "26" etwa einem Drittel der Nonare vorausgehen, während etwa zwei Drittel der Nonare anderen INR folgen..

Aus obiger Auflistung der Positionen der 26 in Qn^3 geht auch hervor, daß diese Zahl mit der Progression von n zu höheren Werten erwartungsgemäß in höheren Positionen seltener vorkommt. Diese Tendenz setzt sich natürlich in Qn^5 fort. Ein Blick auf die Folge Qn^5 zeigt, daß dort die "Rolle" dieses INR auf die zifferngleiche "62" übergeht:

Qn^5/1 – 408: Nachfolger von "26" bzw. "62":

Position (n) der "26":	8	80	134
Nachfolger:	27	45	45

Position (n) der "62":	143	188	197	206	224	296	323	359	377	395
Nachfolger:	45	54	54	54	54	45	54	36	72	63

An anderen als pränonaren Positionen kommt die 62 in Qn^5 nicht vor. Die beiden Qn^5-Werte "26" und "62" zusammen begleiten jedoch nur noch 13 der 136 Nonare dieser Folge (9,6%).- Einem noch geringerem Anteil der Nonare (7,35%) gehen in Folge Qn^7 die dortigen zwei "26" und acht "62" voraus.

Daß die INR "26" und "62" ausschließlich in Qn^x-Folgen mit ungeradem Exponent vorkommen und dort nur pränonare Positionen einnehmen, kann also als ein weiteres Charakteristikum dieser Folgen angesehen werden.

2.) Die nähere Prüfung der Zusammensetzung der kleinsten PAn, der Paare gleicher Zahlen, und ihrer Umgebung, gewährt Einblick in Regelmäßigkeiten in den Strukturen der Qn^x-Folgen, wie sie uns bereits bei der INR-Analyse begegnet sind. Die infolge der Triplettperiodizität zwangsläufig von NR-flankierten kleinsten PAn bestehen bei der Qn^2-Folge aus den Zahlen 16, 25 und 34, welche die gleiche Quersumme (7) haben und sich um den NR 9 unterscheiden. Die diese flankierenden je zwei NR werden ihrerseits von zwei gleichen oder verschiedenen INR 4, 13, 22 oder 31 gesäumt, denen die Quersumme 4 gemeinsam ist. Entsprechendes gilt auch dann, wenn zwei verschiedene der obigen drei Zahlen mit Quersumme 7 ein Paar bilden (hier nicht aufgeführt).

Beispiele aus Qn^2, 1 - 612 (NR unterstrichen; PAn grau unterlegt:

13 / 18 / 16 / 16 / 27 / 31   22 / 36 / 25 / 25 / 18 / 22   31 / 27 / 34 / 34 / 36 / 31
22 / 9 / 16 / 16 / 27 / 22   22 / 27 / 25 / 25 / 18 / 22

Auch dreistellige PAn werden von solchen INR gesäumt, ohne die zusätzliche Beanspruchung von NR (die ja erst als äußere Nachbarn dieser INR auftreten können):

13 / 19 / 18 / 19 / 4   und   22 / 28 / 27 / 28 / 13

Sogar das einzige 11-stellige Palindrom, das bei den Folgen mit geradzahligem Exponent beobachtet wurde, wird von Angehörigen dieser Gruppe von INR (hier 22 und 13) eingerahmt:

22 / 18 / 16 / 16 / 18 / 31 / 28 / 18 / 28 / 31 / 18 / 16 / 16 / 27 / 13

Die Dominanz der Zahlen mit den Quersummen 4 oder 7 reflektiert die Struktur der repetitiven Einheit der QINR-Folge aus Qn^2 ("10/4/7/7/4/10"), auf die wir in Abschnitt 4 gestoßen waren (s. S. 13). Da die entsprechende Einheit der INR-Folge aus Qn^4 dieser sehr ähnlich ist ("10/7/4/4/7/10"), überrascht es nicht, bei den zweistelligen Palindromen letzterer Folge vergleichbare Verhältnisse anzutreffen, was durch wenige Beispiele belegt sei:

43 / 27 / 40 / 40 / 36 / 43   43 / 45 / 49 / 49 / 36 / 43
25 / 45 / 40 / 40 / 27 / 34   7 / 27 / 49 / 49 / 45 / 34

In dieser Folge bestehen die zweistelligen PAn also aus den Zahlen 40 und 49, die, und deren Quersummen, wieder um 9 differieren.

Bei der Qn^6-Folge läßt die fast vollständige Einheitlichkeit der INR-Quersummen ("10") entsprechende Zusammensetzungen der PAn und ihrer Flanken erwarten. Die zweistelligen PAn des Intervalls 1 bis 315 dieser Folge bestehen aus den Zahlen 19 37 46 55 64 82 mit Quersumme 10 und NR als Differenzen (9 und 18), entsprechend der extremen Monotonie der Quersummen der INR der Qn^6-Folge.

Derartige "kasuistische" Erhebungen lassen sich an den verschiedenen Folgen in großer Zahl durchführen; das ersetzt jedoch nicht die systematische Analyse der Verteilung der INR auf prae- und postnonare Positionen in Abhängigkeit vom Exponent x. Im nächsten Abschnitt sind die Ergebnisse einer solchen Analyse zusammengefaßt.

5.3 Verteilung der in den Qn^x-Folgen vorkommenden INR auf prä- und postnonare Positionen; eine Pilotstudie an den ersten 34 Tripletts jeder dieser Folgen

Die jeweilige Stichprobe umfaßt die Positionen von n = 2 bis 103. Die darin enthaltenen 68 INR wurden nach prae- und postnonarer Position geordnet und nach steigendem Zahlenwert tabellarisch zusammengestellt. Da diese Tabellen noch etwas vom Charakter der "Urlisten" zeigen, sind sie als "Daten-Tabellen" bezeichnet und mit dem Wert von x als Nummer gekennzeichnet worden.

INR-Daten-Tabelle 2

Tabellarische Auflistung der prae- bzw. postnonar angeordneten INR bei Qn^2;
Intervall n = 2 bis n = 103, enthaltend die ersten 34 NR dieser Folge und 10 verschiedene INR.

INR	Anzahl praenonar	Anzahl postnonar
1	0	2
14	4	0
7	3	3
10	4	2
13	5	8
16	6	6
19	7	7
22	2	3
25	2	3
31	1	0
Summe	**34**	**34**

Sieben der 10 verschiedenen INR dieser Folge mit dem Exponent x = 2 nehmen sowohl praenonare als auch postnonare Positionen ein. Die Ausnahme "31" kann auf die geringe Größe der Stichprobe zurückgeführt werden, denn schon in Position n = 133 findet sich ein postnonarer INR dieses Zahlenwertes. Ferner kann "1" als Q von 10^2, 100^2 usw. nur postnonar positioniert sein, während der "4" z. B. bei n = 2, n = 101, n = 110 und n = 200 (wie auch n = 1100 und n = 2000) die praenonare

Position vorbehalten ist. Da die 4 in keiner der untersuchten Stichproben aus den anderen Qn^x-Folgen als INR auftritt, kann anhand dieses Materials nicht darüber entschieden werden, ob sie prinzipiell auch postnonare Position einnehmen kann; die 4 muß deshalb in der zusammenfassenden Tabelle (s. u.) als Ausnahme gezählt werden.

INR-Daten-Tabelle 3

Tabellarische Auflistung der prae- bzw. postnonar stehenden INR bei Qn^3,
Intervall n = 2 bis n = 103, die ersten 34 NR enthaltend sowie 10 verschiedene INR.

INR	Anzahl praenonar	Anzahl postnonar
1	0	2
8	8	0
10	0	4
17	6	0
19	0	12
26	15	0
28	0	15
35	4	0
37	0	1
44	1	0
Summe	**34**	**34**

Die INR der Folge Qn^3 sind alternativ auf prae- und postnonare Positionen verteilt; keiner nimmt beide Arten von Positionen ein. Mit zunehmendem Zahlenwert der INR, wechseln die beiden möglichen Positionen ab: Der kleinste INR ("1") beansprucht nur postnonare Positionen, der nächst größere ("8") nur praenonare, u.s.w.

INR-Daten-Tabelle 4

Tabellarische Auflistung der prae- bzw. postnonar stehenden INR bei Qn^4,
Intervall n = 2 bis n = 103, die ersten 34 NR enthaltend sowie 16 verschiedene INR.

INR	Anzahl praenonar	Anzahl postnonar
1	0	2
7	2	2
10	0	1
13	2	3
16	2	0
19	4	0
22	3	4
25	2	5
28	2	4

INR	Anzahl praenonar	Anzahl postnonar
31	6	4
34	2	2
37	5	3
43	3	1
46	0	1
49	0	1
52	1	1
Summe	**34**	**34**

Bei Qn^4 kommen die meisten der 16 verschiedenen INR sowohl in prae- als auch in postnonaren Positionen vor. Unter den 6 Ausnahmen müssen die beiden "1" mit Notwendigkeit auf einen NR folgen (z. B.: Q von 10^4 und 100^4). Die Ausnahmen "46" und "49" sind durch den geringen Umfang dieser speziellen Pilotstudie bedingt, denn bereits innerhalb der anschließenden 50 Positionen von n (n = 104 bis n = 153) finden sich "46" und zweimal "49" in praenonaren Positionen. Die Tauglichkeit der INR „46“ und „49“ für das Vorkommen in PA wird im Abschnitt n = 521 bis n = 555 veranschaulicht, wo „46“ je zweimal prae- und postnonar auftritt, davon zweimal in der PA: „46/45/46“, und „49“ drei mal prae- und zweimal postnonar und hier, neben den einzelnen, in der PA: „54/49/49/54“. Da die kleinen INR-Werte „16“ und „19“ unter den vierten Potenzen größerer Werte von n sehr selten vorkommen, ist der Nachweis ihrer mutmaßlichen bipositionalen Qualität schwierig. Selbst die Analyse von insgesamt 2220 Positionen der Qn^4-Folge (1 bis 816 plus 999 bis 1403) fördert nur 6 mal den INR 16 zutage, und zwar in praenonarer Stellung. In diesem Zusammenhang sei an das erste hier beschriebene Beispiel einer NR-INR-Nachbarschaftsbeziehung erinnert; die ausschließlich praenonare Position der „26“ in der Qn^5-Folge (s. S. 22 ff.). Hier hatte bei hohen Werten von n die „62“ die Rolle des ausschließlich in praenonarer Position vorkommenden INR übernommen. Im Falle der „16“ in Qn^4 wäre also die Verteilung von deren Permutation „61“ bei hohen n-Werten zu prüfen. Das Ergebnis der diesbezüglichen Auswertung oben bezeichneter 2220 Positionen ist: „61“ tritt je 19 mal in prae- und postnonarer Position auf, davon 4 mal als Komponente von PAn.

Die scheinbare Ausnahme „19“ von der Bipositionalität der INR der Qn^4-Folge wird durch die Analyse der o. g. 2220 Positionen eliminiert, wo diese Zahl 12 mal prae- und 3 mal postnonar vorkommt. Auch in diesem Fall kann die Permutation "91" als weiterer Beleg in Anspruch genommen werden, die in den letzten 408 Positionen der verfügbaren Gesamtstichprobe von 10^4 Positionen: n = 9592 bis n = 10 000 vier mal post- und sechs mal praenonar vorkommt.

Somit bleibt nur noch eine der sechs in INR-Daten-Tabelle 4 enthaltenen, scheinbaren Ausnahmen von der Bipositionalität der INR zu klären; die „10“, die sich in Qn^2 als bipositional erwiesen hat (s. INR-Daten-Tabelle 2). Diese kleine Zahl ist in den Positionen 1 bis 408 der Qn^2-Folge neun mal prae- und sechs mal postnonar vertreten und nur noch zweimal postnonar in dem entsprechenden Intervall der Qn^4-Folge. Da sie auch in Qn^6 post- und praenonar auftritt (s. u.), kann ihre prinzipielle Bipositionalität bei den Folgen mit x = 2n wohl angenommen werden.

INR-Daten-Tabelle 5

Liste der prae- bzw. postnonar angeordneten INR bei Qn^5;
Intervall von n = 2 bis n = 103,
welches die ersten 34 NR und 27 verschiedene INR enthält.

INR	Anzahl praenonar	Anzahl postnonar
1	0	2
5	2	0
7	0	2
11	2	0
14	2	0
22	0	3
23	1	0
25	0	3
26	2	0
28	0	2
29	4	0
31	0	3
32	3	0
34	0	3

INR	Anzahl praenonar	Anzahl postnonar
35	6	0
37	0	4
38	1	0
40	0	2
41	4	0
43	0	3
44	1	0
46	0	3
47	3	0
49	0	3
52	0	1
53	2	0
56	1	0
Summe	**34**	**34**

Alternative Verteilung der 27 verschiedenen INR der Folge mit x = 5 auf die prae und postnonaren Positionen, wie im Falle der anderen beiden Folgen mit ungeradem Exponent: Alternative Verteilung; unipositionale Lokalisation jedes INR dieser Folge.

INR-Daten-Tabelle 6

Tabellarische Auflistung der prae- und postnonar angeordneten INR bei Qn^6;
Intervall n = 2 bis n = 103 mit den ersten 34 Tripletts dieser Folge.
Dieser Abschnitt enthält 9 verschiedene INR.

INR	Anzahl praenonar	Anzahl postnonar
1	0	2
10	2	0
19	4	2
28	3	3
37	9	10
46	9	5
55	4	8
64	3	2
73	0	2
Summe	**34**	**34**

Sechs der neun verschiedenen INR dieser Folge mit dem Exponent 6 finden sich sowohl in prae- als auch in postnonaren Positionen. Die Beschränkung der "73" auf zwei postnonare Positionen kann dem geringen Umfang der Stichprobe zugeschrieben werden, denn jenseits von deren Obergrenze (n = 103) treten schon bei n = 134 und n = 146 praenonar positionierte Werte "73" auf.

INR-Daten-Tabelle 7

Tabellarische Auflistung der prae- und postnonar angeordneten INR bei Qn^7;
Intervall n = 2 bis n = 103 mit den ersten 34 Tripletts dieser Folge.
Dieser Abschnitt enthält 31 verschiedene INR.

INR	Anzahl praenonar	Anzahl postnonar
1	0	2
11	2	0
22	0	2
23	3	0
25	0	2
26	2	0
31	0	1
34	0	2
35	2	0
38	4	0
40	0	2
41	1	0
43	0	4
44	1	0
46	0	3
47	1	0

INR	Anzahl praenonar	Anzahl postnonar
53	2	0
55	0	4
56	2	0
58	0	4
59	3	0
62	4	0
64	0	1
65	3	0
67	0	1
68	3	0
70	0	2
73	0	1
76	0	2
77	1	0
79	0	1
Summe	**34**	**34**

Wie bei den anderen Qn^x-Folgen mit ungeradem Exponent sind die 31 verschiedenen INR der Folge mit x = 7 alternativ auf prae- bzw. postnonare Positionen verteilt; keiner dieser INR besetzt beide Arten der NR-bezogenen Positionen.

Zusammenfassende Tabelle über die Verteilung der INR auf prae- und postnonare Positionen

x	2	3	4	5	6	7
verschiedene INR	10	10	16	27	9	31
Anteil unipositionaler INR (%)	2 (20)	10 (100)	0 (0)	27 (100)	1 (11,11)	31 (100)

Als "unipositional" werden INR bezeichnet, die entweder nur praenonare oder nur postnonare Positionen einnehmen, nicht aber beide.

Anmerkungen zu den innerhalb der Folgen mit geradzahligem Exponent gefundenen Anteilen scheinbar unipositionaler INR finden sich in den kurzen Kommentaren zu den INR-Daten-Tabellen 2, 4 und 6, in denen die Zählungsergebnisse aufgeführt sind.

Offensichtlich besteht bezüglich Art der Inanspruchnahme von prae- und postnonaren Positionen durch die INR der Qn^x-Folgen ein systematischer Unterschied zwischen Folgen mit geradzahligem und denen mit ungeradzahligem Exponent: Hohe Anteile der INR aus den drei Folgen mit x = 2n sind bipositional; alle INR der drei Folgen mit x = 2x ±1 sind unipositional. Dieser Unterschied steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem in Abschnitt 3 (Seite 5ff) beschriebenen Fehlen von palindromischen Anordnungen (PAn) in den Folgen mit x = 2n ± 1, also bei denen mit ausschließlich unipositionalen INR. Denn schon die einfachsten PAn, wie i/i, i/n/i und n/i/i/n, erfordern die Besetzung prae- <u>und</u> postnonarer Positionen mit zwei gleichen INR. Unipositionale INR sind also untauglich für die Inanspruchnahme von Positionen innerhalb von PAn. Da in den Qn^x-Folgen mit ungeradzahligem x, 100% der INR unipositional sind, können in diesen Folgen keine PAn entstehen.

Am Beispiel 26/62 bei Qn^3 (siehe 5.2) war die einheitlich praenonare Position dieser Permutationen gezeigt worden. In den Anmerkungen zur INR-Daten-Tabelle 4 wurde die einheitliche Bipositionalität des Permutationenpaares 16/61 als Argument gegen die scheinbare Unipositionalität der 16 verwendet. So stellt sich die Frage nach der Allgemeingültigkeit der Isopositionalität von Permutationen zweistelliger INR.

6 Abschließende Bemerkung

Man darf wohl davon ausgehen, daß die hier beschriebenen Strukturen der Qn^x-Folgen und ihrer Derivate konsistente Konsequenzen des Systems der natürlichen Zahlen sind. Die Begründungszusammenhänge zwischen den nachgewiesenen Eigenschaften und der Folge der natürlichen Zahlen sind letztlich die auf diese angewendeten einfachen Rechenoperationen: Potenzierung und einfache Quersummation, welche auch der Triplettperiodizität der Nonare in den Qn^x-Folgen zugrunde liegen. Die Beobachtung, daß zifferngleiche Zahlen - oft auch andere Zahlen gleicher Quersumme - in bestimmten Positionen einander vertreten können, weist die Quersummenbildung als ein Instrument der Suche nach verborgener Ordnung aus. Die hinter den Internonarfolgen verborgenen Verwandtschaften und Ordnungsprinzipien zum Beispiel wurden erst an den Quersummen, den QINR-Werten, erkennbar. Das gilt sowohl für die repetitiven Einheiten innerhalb der Sequenzen einzelner Folgen, als auch für die palindromischen Anordnungen. Der Vergleich der verschiedenen Folgen miteinander ließ, je nach analysiertem Parameter, zwei Einteilungsprinzipien erkennen: Einmal in die je drei Folgen mit x = 2n bzw. x = 2n ± 1; und zum anderen in die Paare mit x = 2 und 4 / 3 und 6 / 5 und 7. Als Maß des Verwandtschaftsgrades der verschiedenen Elemente einer Folge hat sich der Reduktionsfaktor (RF) bewährt. Die im Vergleich mit Zufallszahlen viel stärkere Reduktion der Vielfalt durch Quersummation bei allen hier beschriebenen Folgen entspringt letztlich der im Systems der natürlichen Zahlen und in den angewendeten einfachen Rechenoperationen vorgegebenen Ordnung.

Ausgangspunkt der Studie war die Triplettperiodizität der Qn^x-Folgen, die der 9 und ihren Multiplen eine prominente Rolle verleiht. Es sei daran erinnert, daß dies auch für die Folgen, an^x und Qan^x (a: ganze Zahl) gilt. Es wäre reizvoll, auch diese Folgen und ihre entsprechenden Derivate auf die in dieser Studie an Qn^x etc. gefundenen Regelmäßigkeiten hin zu untersuchen. Weitere Möglichkeiten vergleichbarer Studien eröffnen sich in der Verwendung anders definierter Quersummen, wie der alternierenden und der nicht alternierenden, sowie der Quersumme zweiter Ordnung.

Erklärungsbedürftig ist das Fehlen von palindromischen Anordnungen in den Qn^x-Folgen mit ungeradzahligem x, um so mehr, als dieser Unterschied keineswegs alle Derivate dieser Folgen betrifft. So sind alle sechs aus den Qn^x-Folgen extrahierten Nonarfolgen reich an PAn (s. Pal.Tab2) und enthalten bedeutende Anteile palindromisch angeordneter Positionen. Demgegenüber fehlen PAn nur bei zwei der drei INR-Folgen (s. Pal.Tab3) mit ungeradem Exponent, bei x = 5 und x = 7, während die $INRQn^3$-Folge mit besonders vielen PAn imponiert und damit eher ihrer auch an anderen Parametern zu erkennenden Ähnlichkeit zu der $INRQn^6$-Folge entspricht.

Vergegenwärtigt man sich die Eigenschaften der Qn^x-Folgen und ihrer Derivate, so wird man von der Vielfalt der "Merkmale" und ihrer Kombinationen an die biologische Taxonomie erinnert, die ihre Entitäten anhand spezifischer, reproduzierbarer Merkmalskombinationen von einander unterscheidet. So erklärt sich vermutlich die gelegentliche Wahl anthropomorpher Formulierungen für die Beschreibung dieses Merkmalspektrums im vorliegenden Text (verhalten, besetzen, verdrängen, Aufgabe übernehmen, Spezifität). Im Gegensatz zur Konsistenz des Systems der natürlichen Zahlen, das allen hier beschriebenen Strukturen zugrunde liegt und ihnen diese Qualität (Konsistenz) verleiht, gilt die Welt der Organismen mit allen ihren Eigenschaften und Lebensvorgängen als nicht mit Notwendigkeit existierend und nicht mit Notwendigkeit so seiend, wie wir sie vorfinden und erforschen, sondern als kontingent.

7 Zusammenfassung

1. Die Anwendung der Kombination von Potenzierung und Quersummenbildung auf die natürlichen Zahlen (n) läßt Zahlenfolgen entstehen, an deren 3., 6., 9. usw. Position eine durch 9 teilbare Zahl – ein Nonar (NR) – steht. Diese Zahlenfolgen werden mit Qn^x (Quersummen von n^x) bezeichnet; sie bestehen aus Tripletts, in denen auf zwei Internonare (INR) ein NR folgt (Triplettperiodizität). Mit steigendem Exponent x nimmt die Anzahl verschiedener NR in der gewählten Standart-Stichprobe: n = 1 bis 408 aus den verschiedenen Qn^x-Folgen von 4 (x = 2) auf 11 (x = 7) zu.

2. Nur die Qn^x-Folgen mit geradzahligem x zeigen palindromische Anordnungen (PAn); deren Längen zwischen 2 und 13 variieren. Deshalb wurde neben der Anzahl der PAn auch der jeweilige Anteil von Positionen erhoben, an denen die Qn^x-Werte palindromisch angeordnet sind. Es überwiegen die zwei- und dreistelligen PAn. Im Scheitel aller PAn mit ungeradzahliger Länge steht ein NR; das Zentrum aller geradzahligen PAn besteht aus zwei gleichen INR.

3. Durch Extraktion der NR-Folgen bzw. der INR-Folgen können diese Komponenten der Qn^x-Folgen getrennt analysiert werden. Im Gegensatz zu den Qn^x-Folgen enthalten die NR-Folgen bei allen 6 Werten von x > 1 palindromische Anordnungen. Unter Berücksichtigung der Stichprobengröße (136 NR = ein Drittel von 408), sind PAn in den NR-Folgen etwa dreimal so häufig wie in den Qn^x-Folgen.

   Im Gegensatz zur Einheitlichkeit der Qn^x-Folgen mit ungeradzahligem Exponent hinsichtlich des Fehlens von PAn, hat die INR-Folge mit x = 3 eine große Anzahl von PAn, während diese bei x = 5 und x = 7 fehlen, den beiden Folgen mit der mehr als der vierfachen Menge verschiedener Elemente im Vergleich mit der Folge $INRQn^3$. Die Frage, ob das Fehlen von PAn in diesen INR-Folgen (x = 5 und 7) auf der geringen Wahrscheinlichkeit von PAn bei hohen Anzahlen verschiedener Elementen, oder auf Exponenten-Spezifität beruht, konnte noch nicht geklärt werden. Auch die INR-Folgen mit geradzahligem Exponent sind uneinheitlich, in sofern bei x = 2 und x = 4 nur PAn mit geradzahliger Länge vorkommen, während bei x = 6 solche beider Arten anzutreffen sind. Bei $INRQn^3$ treten nur PAn mit ungeradzahligen Längen auf.

4. Der Frage nach Umfang und Art einer gewissen Strukturiertheit der extrahierten INR-Folgen wurde zusätzlich mit Hilfe der Analyse von zwei Arten von Derivaten nachgegangen:

   a.) Ergebnisse einer weiteren Quersummenbildung (INR → QINR); und b.) zwei verschiedene Arten von INR-Summen (INRS1 und INRS2). Quersummenbildung an einer bestimmten Menge von verschiedenen Zahlen verringert deren Vielfalt in um so stärkerem Maße, ein je größerer Anteil der Zahlen über gleiche Quersummen miteinander verwandt sind. Die Anzahl verschiedener Werte wird bei den sechs INR-Folgen durch Quersummation im Mittel 3,3-fach stärker reduziert als bei vergleichbaren Mengen von Zufallszahlen (Reduktionsfaktor RF = 0,243 ± 0,035 vs. 0,82 ± 0,14), woraus auf Verwandtschaftsbeziehungen zwischen den INR innerhalb jeder Folge geschlossen werden kann.

   Auf der Ebene der QINR-Folgen wiederholt sich der Unterschied zwischen den Qn^x-Folgen mit geradzahligem und ungeradzahligem Exponent hinsichtlich des Gehalts an PAn: Die Letzteren (x = 2n ± 1) sind durch kurze repetitive Einheiten (bis hin zu zwei alternierenden Zahlen) gekennzeichnet, welche mit einer Reihe von Varianten die ganze Länge der Folge einnehmen. Die Varianten entstehen stets durch Substitutionen mit einer Zahl jeweils gleicher Quersumme. Das gilt auch für Erstere (x = 2n), doch enthalten die repetitiven Einheiten dieser Folgen palindromische Anordnungen, mit der Ausnahme der QINR-Folge mit x = 6, wo 97,8% der QINR den Wert "10" haben.

INRS1 sind die Summen der je zwei INR, die einem NR vorausgehen; QINRS1 sind die Quersummen dieser Summen. Erhoben wurden die Parameter: Anzahl verschiedener INRS1-Werte, Reduktion derselben durch Quersummation (RF), Teilbarkeit durch 3 bzw. durch 9 und Differenzen zwischen den INRS1 einerseits und den QINRS1 andererseits, sowie das Vorkommen von PAn. Die Variabilität dieser Parameter läßt neben unübersehbarer Exponentspezifität die Möglichkeit erkennen, die sechs Folgen in die drei Paare einzuteilen: x = 2 und 4; x = 3 und 6; x = 5 und 7.

Nonare treten - in den zusätzlich zu Qn^x-Folgen untersuchten Derivaten - auf in Form aller INRS1 bei x = 3, eines Drittels aller INRS1 bei x = 5 und x = 7, sowie als Differenzen zwischen INRS1 und zwischen zugehörigen QINRS1 (x = 2, 3, 4, 6). Die beiden INRS1-Mengen bei x = 5 und 7 enthalten je im Mittel mehr als dreimal so viele verschiedene Werte wie jede der übrigen vier INRS1-Mengen.

INRS2 sind die Summen je zweier aufeinander folgender INRS1, also der vier einen NR flankierenden INR. Die an den INRS2-Folgen erhobenen Befunde entsprechen den an den INRS1-Folgen gewonnenen.. PAn finden sich bei den INRS2-Folgen mit x = 2, 3, 4 und 6, in Übereinstimmung mit Verhältnissen bei den INR-Folgen (vergl. Text S.17f mit PAn.Tab 8).

5. Daß die Anordnung der in jeweiliger Qn^x-Folge vorkommenden NR und INR bestimmten Regeln folgt, erschließt sich bereits relativ oberflächlicher Betrachtung der Sequenzen. Die genaue Analyse der von den INR in Bezug zu den NR eingenommenen prä- und postnonaren Positionen ergibt bei den Folgen mit x = 2n ± 1 ausschließlich unipositionale Besetzung, d. h.:
Ein bestimmter INR nimmt stets nur eine der beiden alternativen Positionen ein. Demgegenüber vermag die überwiegende Mehrheit der INR der Folgen mit x = 2n die NR auf beiden Seiten zu flankieren. Dieser Unterschied bedingt das Fehlen von PAn in den Qn^x-Folgen mit ungeradzahligem Exponent! Unipositionale INR sind für die Bildung von PAn untauglich.

   Die Umgebung der PAn ist in den Qn^x-Folgen in der Weise gestaltet, daß die häufig endständigen Nonare von zwei Zahlen gleicher Quersumme gesäumt werden. Exponentspezifität zeigen z. B. die Zahlen der zweistelligen palindromischen Anordnungen; bei x = 2 sind es 16, 25 und 34 mit der gemeinsamen Quersumme 7.

6. Die Vielfalt der Sequenzen, die sich der Analyse der Qn^x-Folgen erschlossen haben, ist im Hinblick auf deren Konsistenz zum System der natürlichen Zahlen, erstaunlich.

Danksagung

Der ehemalige Direktor des Instituts für Humangenetik, Herr Prof. Dr. med. Walther Vogel, hat mir ein Emerituszimmer zur Verfügung gestellt, das ich auch für die Durchführung der vorliegenden Studie – fernab von unserem gemeinsamen Hauptfach (Humangenetik) – habe nutzen können. Dafür danke ich ihm an dieser Stelle herzlich.

Das Zahlenmaterial in Form der Qn^x-Werte der natürlichen Zahlen von 1 – 10 000 hat Herr MA Herbert Heinz aus dem öffentlichen Quellcode Linux abgeleitet und in handlicher Form zur Verfügung gestellt; er stand mir auch bei Schwierigkeiten am PC stets hilfreich zur Seite. In gleichem Umfang half die Chef-Sekretärin, Frau Regina Heidenreich, mit kluger PC-Pädagogik und freundlicher Bereitwilligkeit, zahlreiche Engpässe zu überwinden. Eine Reihe von Mitgliedern des Instituts für Humangenetik sprangen am PC gelegentlich hilfreich ein.

Die Mühe der Formatierung hat sich ein Meister dieser Kunst in aufopferungsvoller Weise unterzogen, der nicht namentlich genannt werden will.

Die Herren Kollegen von der Mathematik, Prof. Dr. Helmut Maier und Prof. Dr. Joseph Högel, haben sich der Mühe unterzogen, dieses sperrige Manuskript zu lesen und fachliche Hinweise zu geben.

Allen diesen hilfreichen Mitmenschen gelten mein herzlicher Dank und meine Anerkennung.

Prof. em. Dr. Winfrid Krone
Bei der Pilzbuche 57
D-89075 Ulm
iwkrone@web.de